第 29 講　通過領域

29 円 $C : x^2 + y^2 - 4ax - (a^2 + 2)y + 4a^2 = 0$ について，次の各問いに答えよ.

(1) a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ.

(2) a が正の値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ.

(3) a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C の内部の点が通過しない領域を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 29 講　通過領域

29 xy 平面上に円 $C_1：x^2+(y+2)^2=4$ と円 $C_2：(x-a)^2+y^2=1$ がある．a を任意の実数として，C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，その 2 点を通る直線の通過領域を図示せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 29 講　通過領域

29 円 $C：x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1) a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ．

(2) a が正の値をとりながら変化するとき，円 C が通過する領域を求めよ．

(3) a が任意の実数値をとりながら変化するとき，円 C の内部の点が通過しない領域を求めよ．

【答】 (1) $y\geqq 0$，$x^2+(y-3)^2\geqq 1$ の表す領域から点 $(0,\ 4)$ を除いた部分

(2) $y>4$　または　$\begin{cases} x^2+(y-1)^2<1 \\ x\leqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x>0 \\ 0\leqq y\leqq 4 \\ x^2+(y-3)^2\geqq 1 \end{cases}$

(3) $y\leqq 0$　または　$x^2+(y-3)^2\leqq 1$

【解答】

(1) $x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2=0$ より

$$(4-y)a^2-4xa+x^2+y^2-2y=0 \quad \cdots\cdots①$$

を a の方程式とみて，①が実数解をもつ条件を考える．

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2x)^2-(4-y)(x^2+y^2-2y)=y\{x^2+(y-3)^2-1\}$$

となるので

(Ⅰ) $4-y\neq 0$ かつ $\dfrac{D}{4}\geqq 0$

または (Ⅱ) $4-y=0$ かつ $-4x\neq 0$

または (Ⅲ) $4-y=0$ かつ $-4x=0$ かつ $x^2+y^2-2y=0$

であればよい．

(Ⅰ)は $y\geqq 0$，$x^2+(y-3)^2\geqq 1$ の $y=4$ を除いた部分．

(Ⅱ)は直線 $y=4$ の $x=0$ を除いた部分．

(Ⅲ)を満たす $(x,\ y)$ は存在しない．

以上より求める領域は

$y\geqq 0$，$x^2+(y-3)^2\geqq 1$ の表す領域から点 $(0,\ 4)$ を除いた部分

(2) ①が少なくとも 1 つの正の解をもつ条件を考える．

(Ⅰ) $4-y\neq 0$ のとき，①の実数解がともに 0 以下である条件

$$\frac{D}{4}\geqq 0 \quad かつ \quad 解と係数の関係より\ \frac{4x}{4-y}\leqq 0,\ \frac{x^2+y^2-2y}{4-y}\geqq 0$$

すなわち

$$x\leqq 0,\ 0\leqq y<4,\ x^2+(y-3)^2\geqq 1,\ x^2+(y-1)^2\geqq 1$$

の表す領域を(1)の(Ⅰ)の領域から除いた部分．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　$4-y=0$，$-4x\neq 0$ すなわち $y=4$ $(x\neq 0)$ のとき①の実数解は

$a=\dfrac{x^2+y^2-2y}{4x}=\dfrac{x^2+8}{4x}$ となるが，これが正となる条件は $\dfrac{x^2+8}{4x}>0$

すなわち $x>0$ であるから，条件は $y=4$ $(x>0)$

(Ⅲ)　$4-y=0$，$-4x=0$，$x^2+y^2-2y=0$ のとき①は任意の解をもつが，これらを満たす $(x,\ y)$ は存在しない．

以上より求める領域は

$$\boldsymbol{y>4}\quad \textbf{または}\quad \begin{cases} \boldsymbol{x^2+(y-1)^2<1} \\ \boldsymbol{x\leqq 0} \end{cases}\quad \textbf{または}\quad \begin{cases} \boldsymbol{x>0} \\ \boldsymbol{0\leqq y\leqq 4} \\ \boldsymbol{x^2+(y-3)^2\geqq 1} \end{cases}$$

(3)　$x^2+y^2-4ax-(a^2+2)y+4a^2<0$ より

$$(4-y)a^2-4xa+x^2+y^2-2y<0 \quad \cdots\cdots②$$

を a の不等式とみて，②が実数解をもたない条件を考えればよい．

(Ⅰ)　$4-y>0$ すなわち $y<4$ のとき，②は

$$a^2-\frac{4x}{4-y}a+\frac{x^2+y^2-2y}{4-y}<0$$

したがって

$$\left(a-\frac{2x}{4-y}\right)^2-\frac{y\{x^2+(y-3)^2-1\}}{(4-y)^2}<0$$

となるので，②が実数解をもたないためには $y\{x^2+(y-3)^2-1\}\leqq 0$ であればよい．

$$y<4 \quad かつ \quad y\{x^2+(y-3)^2-1\}\leqq 0$$

これを整理して

$$\begin{cases} y<4 \\ y\leqq 0 \text{ または } x^2+(y-3)^2\leqq 1 \end{cases}$$

(Ⅱ)　$4-y=0$ すなわち $y=4$ のとき，②は $-4xa+x^2+8<0$　よって

$$\begin{cases} 4x>0 \text{ のとき } & a>\dfrac{x^2+8}{4x} \\ 4x=0 \text{ のとき } & 解なし \\ 4x<0 \text{ のとき } & a<\dfrac{x^2+8}{4x} \end{cases}$$

であるから，②が解をもたないためには $y=4$ かつ $4x=0$ すなわち $(x,\ y)=(0,\ 4)$ であればよい．

(Ⅲ)　$4-y<0$ すなわち $y>4$ のとき，②は常に解をもつので不適．

以上より求める領域は

$$\boldsymbol{y\leqq 0}\quad \textbf{または}\quad \boldsymbol{x^2+(y-3)^2\leqq 1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　通過領域

29　xy 平面上に円 C_1：$x^2+(y+2)^2=4$ と円 C_2：$(x-a)^2+y^2=1$ がある．a を任意の実数として，C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき，その2点を通る直線の通過領域を図示せよ．

【答】 略

【解答】

円 C_1 と C_2 の中心間の距離は $\sqrt{(0-a)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{a^2+4}$ であるので，C_1 と C_2 が異なる2点で交わる条件は

$$2-1<\sqrt{a^2+4}<2+1 \quad \text{すなわち} \quad -3<a^2<5 \qquad \therefore \quad -\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$$

この条件のもとで，C_1 と C_2 の式の辺々の差をとることで，2つの円の交点を通る直線の方程式は

$$2ax+4y+4-a^2=3 \quad \text{したがって} \quad 2ax+4y+1-a^2=0$$

となるが，これを a の2次方程式とみて $a^2-2xa-4y-1=0$ が $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ に少なくとも1つの実数解をもつ条件を考えればよい．

$f(a)=a^2-2xa-4y-1=(a-x)^2-x^2-4y-1$ とおくと

(Ⅰ)　$x\leqq-\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<0$ かつ $f(\sqrt{5})>0$ となればよい．$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1<0$ かつ $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1>0$ より，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

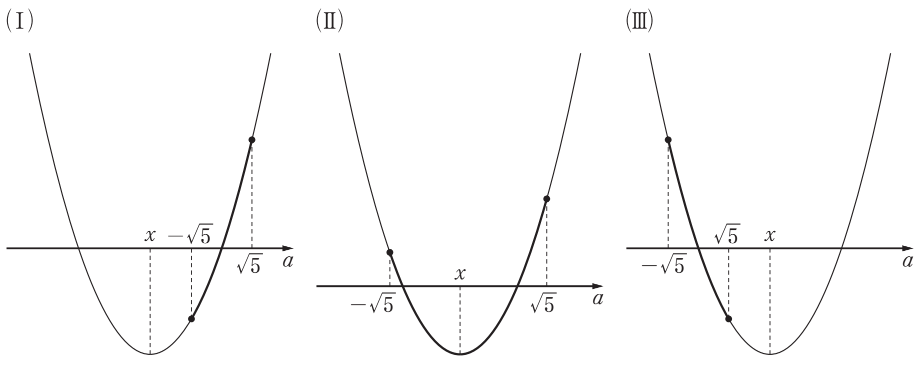
(Ⅱ)　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき

$f(x)\leqq 0$ かつ「$f(-\sqrt{5})>0$ または $f(\sqrt{5})>0$」となればよい．$-x^2-4y-1\leqq 0$ と「$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1>0$ または $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1>0$」より，

$y\geqq-\dfrac{x^2+1}{4}$ かつ「$y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$ または $y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$」

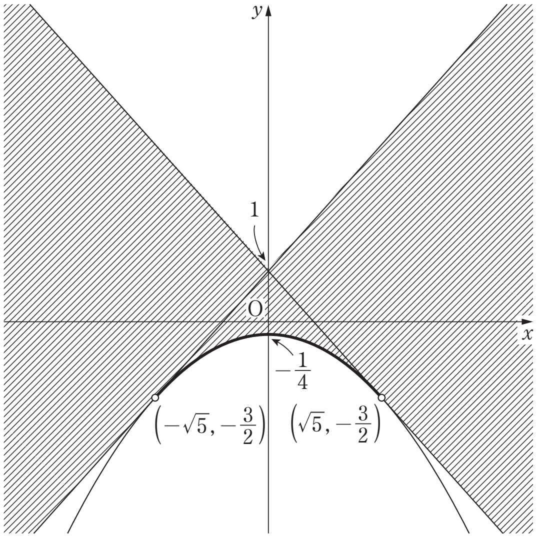
(Ⅲ)　$x\geqq\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})>0$ かつ $f(\sqrt{5})<0$ となればよい．$(-\sqrt{5})^2-2x(-\sqrt{5})-4y-1>0$ かつ $(\sqrt{5})^2-2x(\sqrt{5})-4y-1<0$ より，$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，求める領域は下図斜線部分．境界は $y=-\dfrac{x^2+1}{4}$ $(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ のみ含む．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。